

# Über eine neue Anwendung der Gauß'schen Methode der kleinsten Quadrate: Die Formfindung und statische Analyse von räumlichen Seil- und Hängenetzen

Linkwitz, Klaus

Veröffentlicht in:  
Abhandlungen der Braunschweigischen  
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 27, 1977,  
S.121-153



Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

# Über eine neue Anwendung der Gauß'schen Methode der kleinsten Quadrate: Die Formfindung und statische Analyse von räumlichen Seil- und Hängenetzen

Von Klaus Linkwitz

Herr Präsident, meine sehr verehrten Damen, sehr geehrte Herren!

Ich danke Ihnen, Herr Präsident, und der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft für die Ehre, heute hier sprechen zu können. Mein Vortrag gibt mir Gelegenheit, meine Bewunderung für die einzigartige Persönlichkeit Gauß' auszudrücken; er nötigt mich aber auch zugleich, wenn ich diesen Namen ausspreche, zu großer Bescheidenheit. SCHUBERT hat einmal gesagt, daß man nach BEETHOVEN kaum noch Klaviersonaten schreiben könne. Der Physiker MAX BORN berichtet in seiner Biographie, daß er als junger Mann mit ALBERT EINSTEIN zusammentraf und danach beschloß, nie mehr selbst auf dem Gebiet der Relativitätstheorie zu arbeiten. Aber ich fühle mich hier nicht als Komponist, sondern als Interpret, und das gibt mir Mut, Ihnen das Folgende vorzutragen.

## 1. Einige Hinweise auf Minimumprinzipien in der Physik und Mechanik

GAUSS hat einen Hinweis auf das in der Mechanik gültige Prinzip des kleinsten Zwanges gegeben: „Es ist merkwürdig, daß die freien Bewegungen von der Natur gerade auf dieselbe Art modifiziert werden, wie der rechnende Mathematiker nach der Methode der kleinsten Quadrate Beobachtungen ausgleicht.“ Ein Prinzip, welches zu Minimumbedingungen führt, ist in der Physik als beherrschendes Prinzip vieler Naturgesetze anzutreffen. MAX BORN hat darüber 1939 von der Royal Institution of Great Britain Weekly Evening Meeting einen nachlesenswerten, faszinierenden Vortrag gehalten mit dem Titel „Cause, Purpose and Economy in Natural Laws (Minimum Principles in Physics)“ [1].

Ich möchte daraus einige Beispiele zitieren: In der geometrischen Optik kann man das Reflexionsgesetz an einer spiegelnden Fläche dadurch erklären, daß man einen Lichtstrahl, wenn er von einem Punkt A ausgehend über eine Zwischenreflexion an der Fläche F den Punkt B erreichen soll, seinen Weg so zur und über die spiegelnde Flächen suchen läßt, daß er insgesamt den kürzesten Weg von A nach B zurücklegt. Auch das Brechungsgesetz zwischen verschiedenen Medien läßt sich auf ein Minimumprinzip zurückführen. Es liege ein Punkt A im Medium Luft, ein Punkt B im Medium Glas. Ein Lichtstrahl von A nach B soll seinen Weg so suchen, daß er bei einer Geschwindigkeit  $c_1$  im Medium Luft und einer Geschwindigkeit  $c_2$  im Medium Glas für den Gesamtweg von A nach B die kürzeste Zeit braucht. Die Lichtgeschwindigkeit ist von der optischen Dichte des Mediums abhängig, und man erhält, wenn man diese Maximum-Minimumaufgabe mit den bekannten Hilfsmitteln der Differentialrechnung löst, gerade das Brechungsgesetz der geometrischen Optik.

Einige Beispiele aus der Mechanik führen uns näher an das spätere Vortragsthema heran. Das stabile Gleichgewicht undeformierbarer Körper ist durch eine Lage gekennzeichnet, in welcher der Körper ein Minimum an potentieller Energie besitzt. So hat ein Pendel zwei Gleichgewichtslagen: eine instabile, wenn die Pendelmasse senkrecht über dem Drehpunkt, und eine stabile Gleichgewichtslage, wenn die Pendelmasse unter dem Drehpunkt liegt. In der unteren Lage hat das Pendel von allen möglichen Lagen die geringste potentielle Energie und hängt dann in stabilem Gleichgewicht. Eine Kettenlinie, etwa materialisiert durch eine in ihren Gelenken frei bewegliche zwischen zwei Punkten aufgehängte Gliederkette, nimmt unter Eigengewicht ihre Form so an, daß der Schwerpunkt möglichst tief liegt und damit wieder die potentielle Energie des System Kettenlinie zum Minimum wird.

Auch das stabile Gleichgewicht deformierbarer Körper unter äußerer Belastung ergibt sich so, daß die gesamte Verformungsenergie des deformierten Körpers im Gleichgewichtszustand ein Minimum ist. Ein schräg eingespannter Federstab, an dessen freies Ende ein Gewicht gehängt wird, verbiegt sich so, daß nach seiner elastischen Verformung aus der gestreckten in die deformierte Lage die potentielle Energie ein Minimum ist.

## 2. Analogien zwischen Ausgleichsrechnung und Elastomechanik

Das letzte Beispiel leitet unmittelbar über auf eine Tatsache, welche seit der Jahrhundertwende bekannt ist, nämlich die, daß sich die Begriffe und Rechenverfahren der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate auch mechanisch interpretieren lassen [2]. Um die Jahrhundertwende hat SEBASTIAN FINSTERWALDER nachgewiesen, daß sich in der Photogrammetrie die ausgeglichenen Lagen von Strahlenbündeln als Gleichgewichtsfiguren deuten lassen. Der erste mechanische Analogrechner zur mechanischen Ausgleichung trigonometrischer Punkteinschaltungen wurde 1899 von FISCHER beschrieben. Besonders österreichische Geodäten beschäftigten sich in der Folgezeit eingehend mit der Frage mechanisch-statischer Analogien zur Ausgleichsrechnung. S. WELLISCH formulierte die Theorie der kleinsten Produkte, HAPANOWICZ führte die Ausgleichung von Polygonzügen auf ein statisches Problem zurück, K. FRIEDRICH schrieb 1943 in der ZfV die Arbeit „Zwei aus den Grundgesetzen der Mechanik abgeleitete Beweise für die Richtigkeit der Methode der kleinsten Quadrate“, und schließlich veröffentlichte W. PASSER 1932/33 über statische Methoden zur Ausgleichung von Streckennetzen.

Da jedoch Streckennetze um die Jahrhundertwende und auch danach in der Geodäsie zunächst keine praktische Bedeutung hatten, wurden diese Arbeiten nicht weiter verfolgt. Ich selbst habe 1960 in meiner Dissertation „Fehlertheorie und Ausgleichung von Streckennetzen nach der Theorie elastischer Systeme“ die gegenseitigen Beziehungen zwischen Ausgleichsrechnung und Elastomechanik mit Hilfe der Matrizenrechnung noch einmal ausführlich untersucht [2].

Diese interessante Analogie zwischen Ausgleichsrechnung und Elastostatik verhalf jedoch keiner der beiden Disziplinen zu neuen, erweiterten Anwendungen

gegenüber den bisherigen klassischen Anwendungen – wie sie etwa H. WOLF in den AVN, Heft 4/1977 [3] zusammengestellt hat – sondern sie führt nur zu einer vertieften Interpretierung von Ausgleichungsergebnissen und zu vereinfachten numerischen Verfahren bei der Ausgleichung von Streckennetzen nach bedingten Beobachtungen.

Die Formfindung und Analyse von Seilnetzen mit Hilfe der Ausgleichungsrechnung ist jedoch, wie ich Ihnen zeigen möchte, eine wirkliche Erweiterung der Methode der kleinsten Quadrate sowohl hinsichtlich der betrachteten Objekte Seil- und Hängenetze wie auch hinsichtlich der Methode, denn sie leitet über zur nichtlinearen Ausgleichungsrechnung und zur Kraftdichtemethode. Zum Verständnis möchte ich Ihnen jedoch zunächst die klassische Analogie zwischen Statik und Ausgleichungsrechnung am einfachen

### 2.1 Beispiel einfach überbestimmter ebener Bogenschnitt $\triangleq$ statisch einfach unbestimmtes ebenes Fachwerk

noch einmal vorführen. Zur Ausgleichung des in Fig. 1 dargestellten Bogenschnittes – 1 Neupunkt, 3 Festpunkte, 3 Beobachtungen, 1 Überbestimmung – nach den Regeln der Ausgleichungsrechnung schreiben wir zunächst die nichtlinearen Fehlergleichungen an

$$\begin{aligned} l_1 + v_1 &= \sqrt{(x_p - x_1)^2 + (y_p - y_1)^2} \\ l_2 + v_2 &= \sqrt{(x_p - x_2)^2 + (y_p - y_2)^2} \\ l_3 + v_3 &= \sqrt{(x_p - x_3)^2 + (y_p - y_3)^2} \end{aligned} \quad (1)$$

linearisieren sie nach Einführung von Näherungswerten

$$\begin{aligned} x_p &= x_0 + \Delta x \\ y_p &= y_0 + \Delta y \end{aligned} \quad (2)$$

und erhalten dann die linearen Fehlergleichungen

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{x_0 - x_1}{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}} \cdot \Delta x + \frac{y_0 - y_1}{\sqrt{(y_0 - y_1)^2 + (x_0 - x_1)^2}} \cdot \Delta y + \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2} - l_1 \\ v_2 &= \frac{x_0 - x_2}{\sqrt{(x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2}} \cdot \Delta x + \frac{y_0 - y_2}{\sqrt{(x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2}} \cdot \Delta y + \sqrt{(x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2} - l_2 \\ v_3 &= \frac{x_0 - x_3}{\sqrt{(x_0 - x_3)^2 + (y_0 - y_3)^2}} \cdot \Delta x + \frac{y_0 - y_3}{\sqrt{(x_0 - x_3)^2 + (y_0 - y_3)^2}} \cdot \Delta y + \sqrt{(x_0 - x_3)^2 + (y_0 - y_3)^2} - l_3, \end{aligned} \quad (3)$$

die wir, da sich die Koeffizienten der  $\Delta x$  und  $\Delta y$  als Winkelfunktionen deuten lassen, auch in der folgenden Form schreiben können

$$\begin{aligned} v_1 &= \cos \alpha_{01} \cdot \Delta x + \sin \alpha_{01} \cdot \Delta y + f_1(x_0) - l_1 \\ v_2 &= \cos \alpha_{02} \cdot \Delta x + \sin \alpha_{02} \cdot \Delta y + f_2(x_0) - l_2 \\ v_3 &= \cos \alpha_{03} \cdot \Delta x + \sin \alpha_{03} \cdot \Delta y + f_3(x_0) - l_3 \end{aligned} \quad (4)$$

oder, in Matrizen

$$v = A \cdot \Delta x - (1 - f(x_0)) \quad (4^*)$$

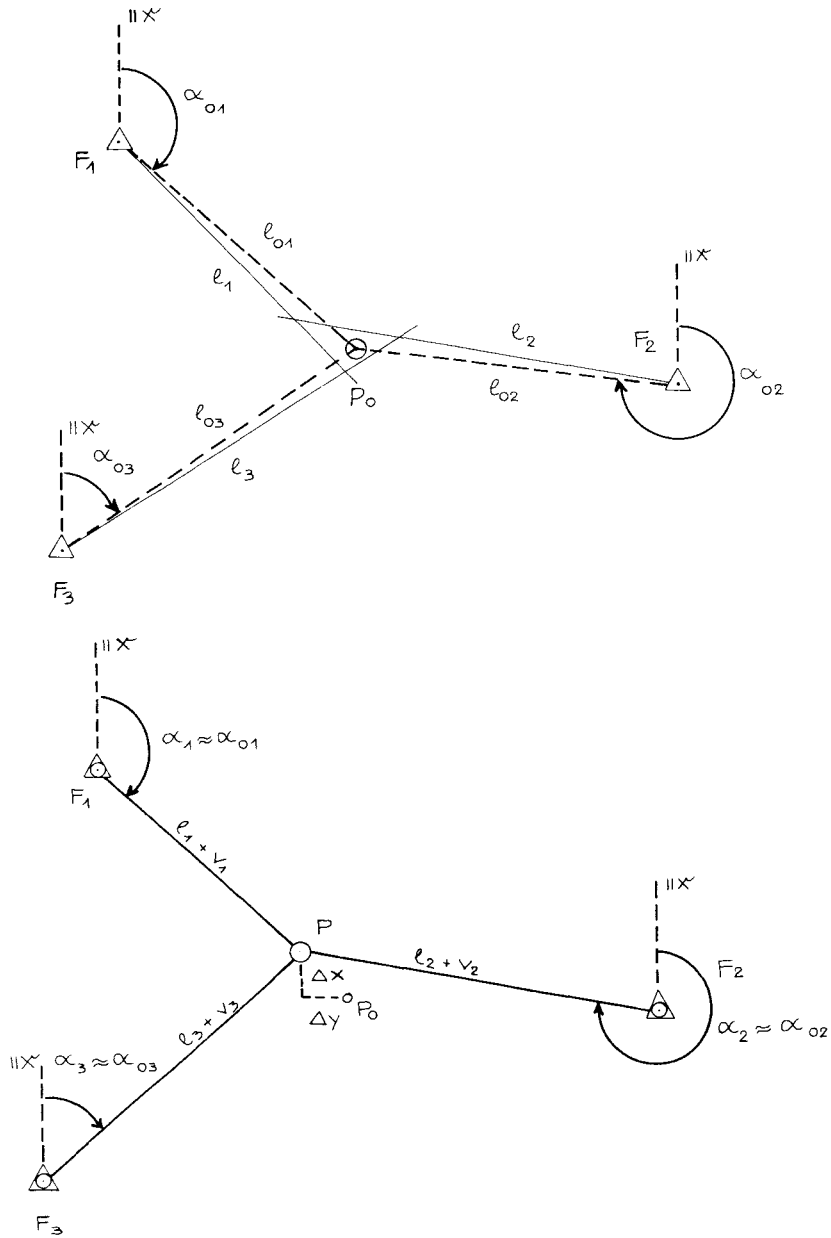


Fig. 1

Einfach überbestimmter Bogenschnitt vor und nach der Ausgleich

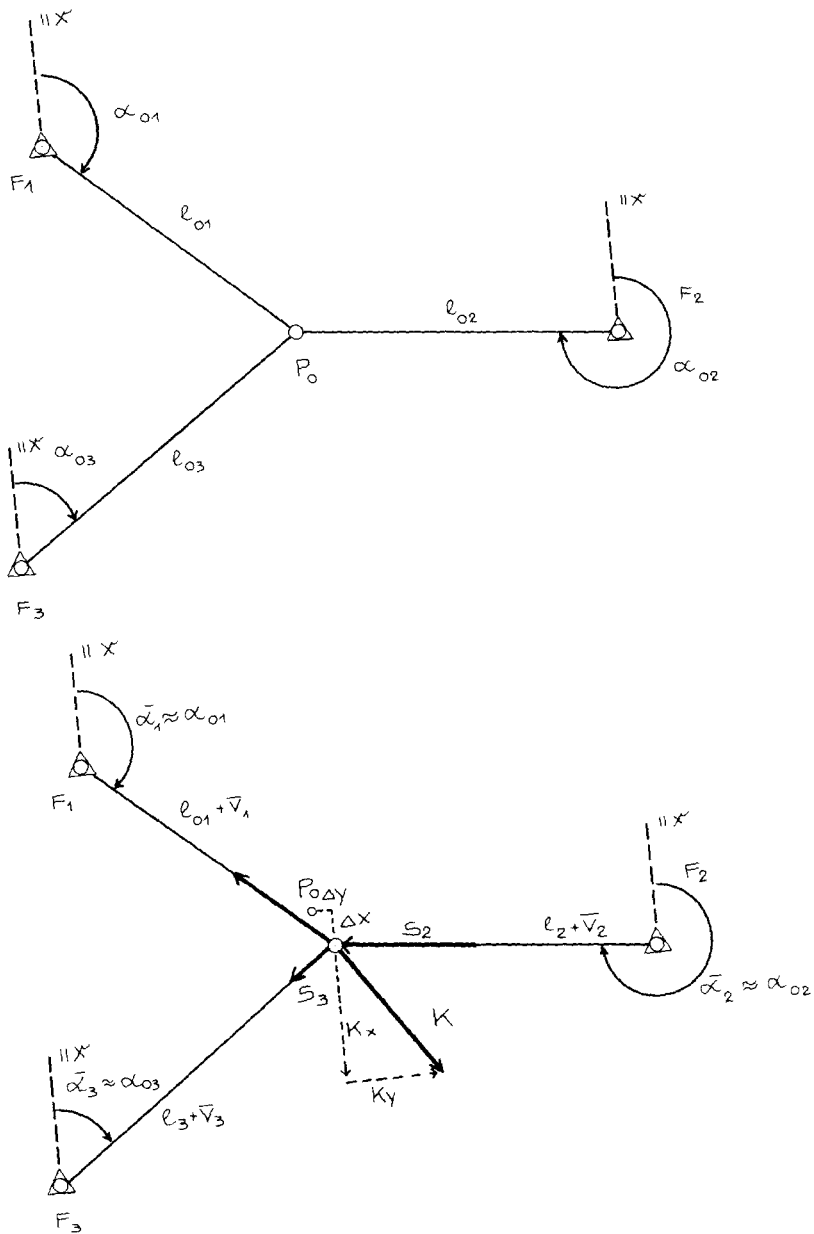


Fig. 2

Einfach statisch unbestimmtes Fachwerk vor und nach Belastung durch eine äußere Kraft  $K$

mit der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_{01} & \sin \alpha_{01} \\ \cos \alpha_{02} & \sin \alpha_{02} \\ \cos \alpha_{03} & \sin \alpha_{03} \end{pmatrix} \quad (5)$$

oder, etwas anders geschrieben, und mit der Abkürzung

„Wurzel“  $\triangleq w_{0i} = \sqrt{(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{x_0 - x_1}{w_{01}} & \frac{y_0 - y_1}{w_{01}} \\ \frac{x_0 - x_2}{w_{02}} & \frac{y_0 - y_2}{w_{02}} \\ \frac{x_0 - x_3}{w_{03}} & \frac{y_0 - y_3}{w_{03}} \end{pmatrix} \quad (6)$$

und schließlich, noch einmal etwas anders geschrieben, (und diese Schreibweise wird später wichtig sein)

$$\begin{pmatrix} w_{01}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & w_{02}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & w_{03}^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 - x_1 & y_0 - y_1 \\ x_0 - x_2 & y_0 - y_2 \\ x_0 - x_3 & y_0 - y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_0 - x_1}{w_{01}} & \frac{y_0 - y_1}{w_{01}} \\ \frac{x_0 - x_2}{w_{02}} & \frac{y_0 - y_2}{w_{02}} \\ \frac{x_0 - x_3}{w_{03}} & \frac{y_0 - y_3}{w_{03}} \end{pmatrix} \quad (7)$$

$\mathbf{W}_0^{-1} \quad \cdot \quad \mathbf{X} \quad = \quad \mathbf{A}$

In bekannter Weise ergibt sich die Lösung zu

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}' \mathbf{P} \mathbf{A}) \cdot \Delta \mathbf{x} &= \mathbf{A}' \mathbf{P} (1 - f(\mathbf{x}_0)) \\ \Delta \mathbf{x} &= (\mathbf{A}' \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}' \mathbf{P} (1 - f(\mathbf{x}_0)) \end{aligned} \quad (8)$$

Wir formulieren nun eine analoge Aufgabe aus der Elastostatik und legen sie einem Statiker vor:

In den drei Festpunkten  $F_1, F_2, F_3$  werden drei Stäbe der Längen  $l_{01}, l_{02}, l_{03}$  frei drehbar eingehängt und so abgelängt, daß sie in  $P_0$  zwangsfrei und ohne innere Widersprüche in einem Gelenk zusammengefügt werden können. Wegen der „korrekten“ Ablängung der Verbindungsstäbe ist das System geometrisch widerspruchsfrei, und es treten zunächst keine inneren Stabkräfte auf. Nun lassen wir im Punkt  $P_0$  eine äußere Kraft  $K$  angreifen und fragen den Statiker

- welche inneren Kräfte  $s_1, s_2$  und  $s_3$  treten in den Stäben  $l_{0i}$  auf und
- wie verschiebt sich der Punkt  $P_0$  unter dem Einfluß der äußeren Kraft  $K$ , da jetzt die Stäbe  $l_{0i}$  durch die in ihnen wirkenden Kräfte  $s_i$  nach dem Hooke'schen Gesetz verlängert oder verkürzt werden und damit auch  $P_0$  seine Lage ändert.

Der Statiker wird nicht zögern, unsere Frage zu beantworten. Dazu setzt er zunächst an die

a) Gleichgewichtsbedingungen in P: Die Summe der Kräfte in P muß Null sein

$$\sum \text{Kräfte in P} = 0$$

Genaugenommen müssen die Gleichgewichtsbedingungen für die verformte Lage von P nach Belastung mit K, also für die Winkel  $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3$  der Stäbe angesetzt werden. In der „Theorie erster Ordnung“ der Elastomechanik vernachlässigt man jedoch den Unterschied zwischen ursprünglicher und verformter geometrischer Konfiguration und setzt die Winkel  $\alpha_{01} \approx \bar{\alpha}_1, \alpha_{02} \approx \bar{\alpha}_2, \alpha_{03} \approx \bar{\alpha}_3$  des ursprünglichen Systems ein.

Die Gleichgewichtsbedingungen sind dann für die x-Komponente  $K_x$  von K

$$s_1 \cdot \cos \alpha_{01} + s_2 \cdot \cos \alpha_{02} + s_3 \cdot \cos \alpha_{03} = K_x \quad (9a)$$

und für die y-Komponente  $K_y$  von K

$$s_1 \cdot \sin \alpha_{01} + s_2 \cdot \sin \alpha_{02} + s_3 \cdot \sin \alpha_{03} = K_y \quad (9b)$$

oder, in Matrizen

$$\mathbf{A}' \mathbf{s} = \mathbf{k} \quad (9)$$

Mit dem Hooke'schen Gesetz

$$s_i = \frac{v_i \cdot F_i \cdot E_i}{l_{0i}} = v_i \frac{h_i}{l_{0i}} \quad (10)$$

in Matrizen  $\mathbf{s} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{L}_0^{-1} \cdot \mathbf{v}$

$v_i$  = elastische Längenänderung

$F_i$  = Querschnittsfläche des Stabes

$E_i$  = Elastizitätsmodul

können die obigen Gleichungen umgeschrieben werden in

$$\cos \alpha_{01} \cdot \frac{h_1}{l_{01}} \cdot v_1 + \cos \alpha_{02} \cdot \frac{h_2}{l_{02}} \cdot v_2 + \cos \alpha_{03} \cdot \frac{h_3}{l_{03}} \cdot v_3 = K_x \quad (11)$$

$$\sin \alpha_{01} \cdot \frac{h_1}{l_{01}} \cdot v_1 + \sin \alpha_{02} \cdot \frac{h_2}{l_{02}} \cdot v_2 + \sin \alpha_{03} \cdot \frac{h_3}{l_{03}} \cdot v_3 = K_y$$

oder, in Matrizen

$$\mathbf{A}' (\mathbf{H} \cdot \mathbf{L}_0^{-1}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{k} \quad (11^*)$$

wobei  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{L}_0^{-1}$  Diagonalmatrizen mit den Elementen  $h_i$  und  $1/l_{0i}$  sind und  $\mathbf{A}$  die gleichen Elemente wie  $\mathbf{A}$  des Bogenschnittes oben enthält.

Die Formel (11\*) erinnert uns – wie wir sehen werden nicht ohne Grund – an die bekannte Formel  $\mathbf{A}' \mathbf{P} \mathbf{v} = 0$  der Ausgleichsrechnung.



Als weiteren Schritt zur Lösung schreibt der Statiker nun an die

b) Differentiellen Verträglichkeitsbedingungen

$$\begin{aligned}\bar{v}_1 &= \cos \alpha_{01} \cdot \Delta x + \sin \alpha_{01} \cdot \Delta y \\ \bar{v}_2 &= \cos \alpha_{02} \cdot \Delta x + \sin \alpha_{02} \cdot \Delta y \\ \bar{v}_3 &= \cos \alpha_{03} \cdot \Delta x + \sin \alpha_{03} \cdot \Delta y\end{aligned}\quad (12)$$

in Matrizen

$$\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{x} \quad (12^*)$$

welche anschaulich interpretiert besagen, daß die elastischen Längenänderungen der einzelnen Stäbe und die Koordinatenänderungen  $\Delta x$  und  $\Delta y$  in P im deformierten System miteinander verträglich sein müssen, oder, anders ausgedrückt: Der deformierte Punkt (P+ $\Delta P$ ) muß so liegen, daß die elastisch verformten Stäbe mit der Länge ( $l_{0i} + \bar{v}_i$ ) sich in der deformierten Lage widerspruchsfrei zusammenfügen lassen.

Die differentiellen Verträglichkeitsbedingungen erhalten wir formal – analog zur Linearisierung der Fehlergleichungen in der Ausgleichsrechnung – in einfacher Weise: Für das unverformte, widerspruchsfreie System gilt

$$l_{0i} = \sqrt{(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2} \quad (*)$$

und für das verformte System, in dem sich die elastisch gedehnten Stäbe ( $l_{0i} + v_i$ ) wieder in P zusammenfügen lassen müssen

$$l_{0i} + v_i = \sqrt{(x_0 + \Delta x - x_i)^2 + (y_0 + \Delta y - y_i)^2}$$

Daraus bekommen wir nach einer Taylorentwicklung

$$l_{0i} + v_i = \sqrt{(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2} + \cos \alpha_{0i} \cdot \Delta x + \sin \alpha_{0i} \cdot \Delta y \quad (**)$$

und wegen (\*) gerade unsere Gleichungen (12).

Wir setzen (12\*) in (11\*) ein und erhalten

$$\mathbf{A}' (\mathbf{H} \cdot \mathbf{L}_0^{-1}) \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{x} = \mathbf{k} \quad (13)$$

und durch Umkehrung

$$\Delta \mathbf{x} = [\mathbf{A}' (\mathbf{H} \cdot \mathbf{L}_0^{-1}) \mathbf{A}]^{-1} \cdot \mathbf{k} \quad (13 a)$$

sofort einen Ausdruck, in dem die Verschiebungen  $\Delta \mathbf{x}$  als Funktion der äußeren Last  $\mathbf{k}$  ausgedrückt sind.

Der Formalismus der Lösung, welcher genau dem der Ausgleichsrechnung entspricht, zeigt uns aber auch, daß die potentielle Energie des Systems

$$E = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{v}}' (\mathbf{H} \cdot \mathbf{L}_0^{-1}) \bar{\mathbf{v}} \Rightarrow \min. \quad (14)$$

im Gleichgewicht zwischen inneren und äußeren Kräften in der deformierten Lage ein Minimum sein muß.

In der vorgelegten Form kann uns die dem Statiker vorgelegte Aufgabe noch nicht ganz befriedigen: In der Ausgleichungsrechnung beschäftigen wir uns gerade nicht mit widerspruchsfreien Systemen (die dann belastet werden), sondern wir behandeln Systeme, die geometrisch überbestimmt zu inneren Widersprüchen führen und dann durch die Ausgleichungsrechnung widerspruchsfrei gemacht werden. Wir legen daher unsere Aufgaben in abgeänderter Fragestellung erneut dem Statiker vor:

Die drei Stäbe der Länge  $l_{0i}$  seien zunächst widerspruchsfrei und ohne innere Kräfte zu erzeugen in  $P_0$  zusammengefügt. Nun erteilen wir den drei Stäben willkürliche Längenänderungen  $\Delta l_i$ , so daß ihre Längen jetzt  $(l_{0i} + \Delta l_i) = l_i$  sind. In der Ingenieurpraxis könnten sie dadurch entstehen, daß die drei Stäbe gegenüber der vorausberechneten zwangsfreien Lage falsch abgelängt worden sind. In der Fig. 3 sind die drei Stäbe verkürzt dargestellt; die  $\Delta l_i$  können jedoch beliebig positiv oder negativ sein. Wir stellen uns vor, die Stäbe seien sehr elastisch. In Fig. 3 sind alle Stäbe zu kurz, und wir können sie uns deshalb als Gummiseile vorstellen. Um sie erneut im Knoten P miteinander verbinden zu können, müssen wir sie alle elastisch dehnen. Wir fragen nun

- wie groß ist die elastische Verlängerung jedes einzelnen Stabes (= Gummistückes) nach dem zwangsweisen Zusammenfügen in P und
- wohin wandert der Knotenpunkt  $P_0$  nach diesem zwangsweisen Zusammenfügen?

Auch diese Aufgabe bereitet dem zu Rate gezogenen Statiker keine Schwierigkeiten. Er setzt nach Gleichung (9\*) die Gleichgewichtsbedingungen für die unbekannten Stabkräfte  $s_i$  im Knoten P an zu

$$\begin{aligned} \cos \alpha_{01} \cdot s_1 + \cos \alpha_{02} \cdot s_2 + \cos \alpha_{03} \cdot s_3 &= 0 \\ \sin \alpha_{01} \cdot s_1 + \sin \alpha_{02} \cdot s_2 + \sin \alpha_{03} \cdot s_3 &= 0 \end{aligned} \quad (15) \triangleq (9^*)$$

denn die 3 inneren Kräfte  $s_1$ ,  $s_2$  und  $s_3$  müssen jetzt im Gleichgewicht sein, und da keine äußere Kraft auftritt, ist die rechte Seite der Gleichungen (15)  $\triangleq$  (9\*) jetzt null.

Die Stabkräfte  $s$  werden aber hervorgerufen durch die elastischen Längenänderungen  $v$ , die sich beim zwangsweisen Zusammenbau ergeben. Wir können also mit dem Hooke'schen Gesetz – ausgehend von den ungedehnten Längen  $l_i = l_{0i} + \Delta l_i$  –

$$s = (H \cdot L^{-1}) \cdot v \quad = (10)$$

die Kräfte  $s$  in den Gleichgewichtsbedingungen (15) ersetzen durch die  $v$ ; (10) in (15) ergibt

$$A' (H \cdot L) \cdot v = 0 \quad (16)$$

Nun werden, wie oben, die Verträglichkeitsbedingungen formuliert, welche besagen, daß die drei Stäbe im elastisch verformten Zustand wieder widerspruchsfrei im Knoten P zusammenlaufen müssen. Dazu schreiben wir folgende Gedankenkette auf: Zunächst hatten die 3 Stäbe die Längen  $l_{0i}$  und ließen sich zwangsfrei in der Knotenlage  $P_0 (x_0, y_0)$  zusammenfügen. Für diese Ausgangssituation galt also

$$l_{0i} = \sqrt{(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2} \quad i = 1, 2, 3 \quad (17)$$

Dann lösten wir die 3 Stäbe aus ihrem Verbund in  $P_0$  und erteilten ihnen die Längen-

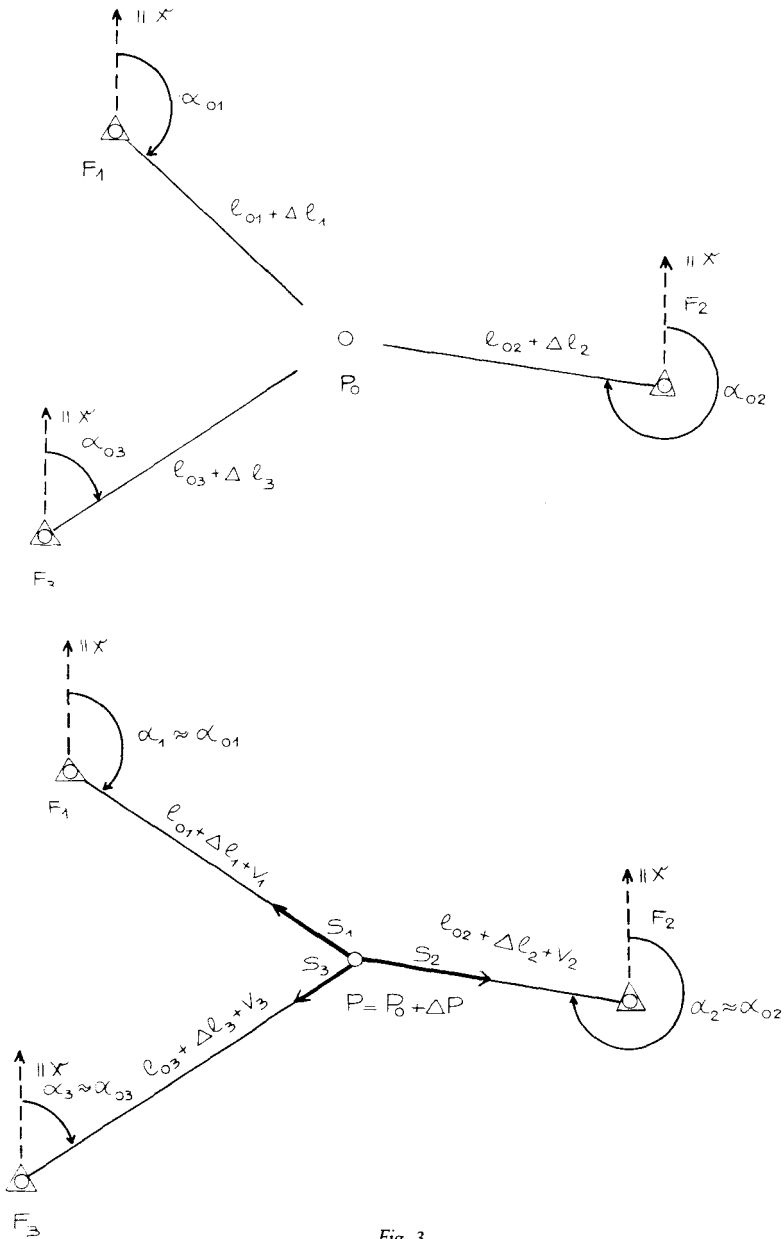


Fig. 3

Einfach statisch unbestimmtes Fachwerk vor und nach zwangsweisem Zusammenbau nicht kompatibler Stablängen

änderungen  $\Delta l_i$ . Die Gesamtlänge eines Stabes ist jetzt  $(l_{0i} + \Delta l_i)$ , diese Längen sind jedoch nicht miteinander verträglich. Erst nach zusätzlicher elastischer Längenänderung  $v_i$ , d. h. nachdem ihre Gesamtlänge

$$(l_{0i} + \Delta l_i + v_i) = l_i$$

ist, lassen sie sich in einer veränderten Knotenlage  $(P_0 + \Delta P)$ ,  $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$  wieder widerspruchsfrei zusammenfügen. Für diese Lage gilt also

$$l_{0i} + \Delta l_i + v_i = \sqrt{(x_0 + \Delta x - x_i)^2 + (y_0 + \Delta y - y_i)^2}$$

Wir entwickeln die rechte Seite nach Taylor und erhalten

$$l_{0i} + \Delta l_i + v_i = \sqrt{(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2} + \cos \alpha_{0i} \cdot \Delta x + \sin \alpha_{0i} \cdot \Delta y$$

und wegen (17)

$$\begin{aligned} \Delta l_i + v_i &= \cos \alpha_{0i} \cdot \Delta x + \sin \alpha_{0i} \cdot \Delta y \\ \Delta l + v &= A \cdot \Delta x \Rightarrow v = A \cdot \Delta x - \Delta l \end{aligned} \quad (18)$$

als Verträglichkeitsbedingungen.

Durch Einsetzen der  $v$  aus (18) in die Gleichgewichtsbedingungen (16) erhalten wir sofort die „Normalgleichungen“

$$A' (H \cdot L^{-1}) A \cdot \Delta x - A' (H \cdot L^{-1}) \Delta l = 0 \quad (19)$$

mit der Lösung

$$\Delta x = [A' (H \cdot L^{-1}) A]^{-1} A' (H \cdot L^{-1}) \Delta l$$

Setzen wir in den obigen Gleichungen (13 a) die äußeren Lasten mit  $K = e$  zu eins an, so erhalten wir

$$\Delta x = [A' (H \cdot L^{-1}) A]^{-1} \cdot e \quad (20)$$

oder, ausgleichungstechnisch formuliert

$$\Delta x = Q_{x,x} \cdot e. \quad (20)$$

In Worten: die Gewichtsreziproken  $Q_{x,x}$  der Koordinaten lassen sich deuten als Verschiebungen von  $P$  in den Koordinatenrichtungen unter Einheitsbelastungen  $e$ . Aus Gleichung (20) erkennen wir aber auch sofort die zweite wesentliche Eigenschaft der Methode der kleinsten Quadrate, nämlich, daß sie zu größten Gewichten und damit kleinsten Kofaktoren der Unbekannten führt. Nach Anbringen der Einheitslast  $K_x = 1$  in  $P$  ist die äußere Arbeit  $1/2 K_x \cdot Q_{xx}$  an  $P$  gleich der inneren Formänderungsarbeit. Diese ist aber bei Gleichgewicht ein Minimum. Infolgedessen ist auch, da  $K_x = 1$  fest vorgegeben ist und die Arbeit dann nur noch vom Kraftweg abhängt,  $Q_{xx}$  minimal, wenn das Produkt  $1/2 K_x \cdot Q_{xx}$  ein Minimum ist.

Ausgehend vom Beispiel des Bogenschnittes würden wir, wenn wir der dabei gefundenen Analogie weiter nachgingen – dabei entsprechen übrigens die Ausgleichung

nach vermittelnden Beobachtungen der Verschiebungsmethode und die Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen der Kraftmethode der Elastomechanik – eine ganze Anzahl von Analogien auffinden. In der Übersicht der Fig. 4 habe ich sie zusammengestellt.

Ausgleichungsrechnung	Elastomechanik
Streckennetz/geod. Netz	Fachwerk, Seilnetz
– ausgeglichene Lage	– Gleichgewichtslage
– $\alpha' p \theta = \sigma$ : durchgreifende Kontrollformel	– $u' \cdot \frac{1}{l} \cdot b = \sigma$ : Kräftesummen verschwinden in jedem Knotenpunkt
– $\sum vvp \Rightarrow$ minimum	– $\sum$ Verformungsenergie $\Rightarrow$ minimum
– Gemessene Länge $l$	– Fachwerkstab der Länge $l$
– Verbesserung $\theta$ der Beob. durch die Ausgleichung	– Elastische Längenänderung des Fachwerkstabes als Folge der im Gleichgewichtszustand auftretenden inneren Kräfte
– Gewicht $p$ der Beobachtungen	– Hook'sche Materialkonstante $\frac{1}{l} \cdot l^{-1}$ der Stäbe
– Kofaktoren der Koordinaten	– Verschiebung in den Knoten- punkten unter virtueller Einheitsbelastung
– Netz mit überschüssigen Beob.	– Statisch unbestimmtes System

Fig. 4

*Klassische Analogien zwischen Ausgleichungsrechnung und Elastomechanik*

## 2.2 Fehlerfortpflanzungsgesetz und Gewichtsreziproke in der Geodäsie $\triangleq$ Verformung elastomechanisches Analogon unter Einheitsbelastung

Die Tatsache nun, daß sich die Gewichtsreziproke  $Q_{xx}$  einer Koordinate  $x$  als Verschiebung unter Einheitsbelastung deuten läßt, eröffnet die Möglichkeit, ebenfalls das Fehlerfortpflanzungsgesetz in die Elastomechanik zu übersetzen und z.B. die Fehlerfortpflanzung in schematisch gebildeten Streckennetzen zu untersuchen. Zum Auffinden des Kofaktors für eine bestimmte Funktion braucht man nur eine entsprechende Kraft  $K = 1$  am elastischen Analogon anzubringen und berechnet dann die Verschiebung in Richtung des gesuchten Fehlers unter dieser Einheitsbelastung. Diese

Berechnungen sind im Vergleich zur bekannten geodätischen Fehlerberechnung häufig wesentlich einfacher. Denn die Elastomechanik benötigt keine geschlossene Funktion  $x = f(l_1, l_2 \dots l_n)$ , in der die gesuchte Größe  $x$  als Funktion der fehlerhaften Größen  $l_i + \Delta l_i$  ausgedrückt wird. Man gelangt vielmehr sofort zu den Koeffizienten der partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial l_i}$  aus der Hauptgleichung des Fachwerks nach dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen. Die partiellen Ableitungen sind nämlich identisch mit den Stabkräften im Fachwerk, die sich als Folge der Einheitsbelastung  $K = 1$  – welche man gerade zur Ermittlung der Verschiebungen anbringt – ergeben. In Fig. 5 habe ich einige Belastungsbilder für verschiedene Fehlerfunktionen zusammengestellt und in Fig. 6 aus [2] einige, natürlich bekannte, Resultate zusammengestellt.

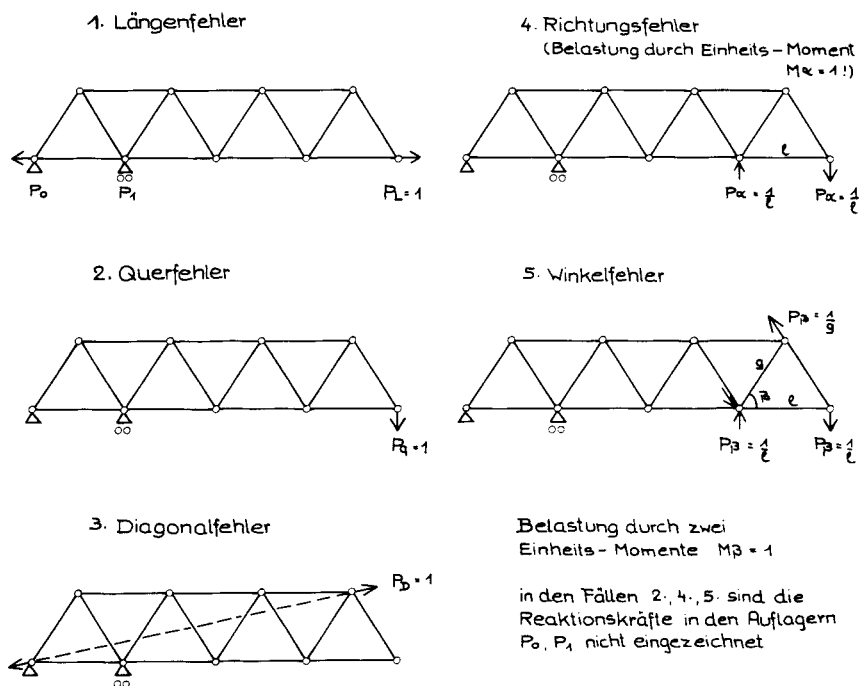


Fig. 5

Belastungsbilder am Analogfachwerk zur Herleitung von Fehlerfunktionen in Streckennetzen

Nach diesen einführenden Bemerkungen, in der wir uns noch einmal mit der Denkweise beider Theorien vertraut gemacht haben, wenden wir uns dem Hauptthema zu und fragen zunächst

Kettentyp	<div> </div>	Funktionsgewichts-reziproke und zugehöriger Belastungsfall				Anz. der Oberbest		
		<div> </div> Längenfehler	<div> </div> Richtungsfehler	<div> </div> Querfehler				
Gleichseitige Dreiecke	<div> </div>	$n$	(201)	$\frac{1}{3\ell^2} (8n+6)$	(205)	$\frac{1}{3} (8n^3+9n^2-17n)$	(209)	0
Quadrate mit einer Diagonalen	<div> </div>	$n$	(202)	$\frac{1}{\ell^2} (2n+4)$	(206)	$\frac{2}{3} n^3+2n^2-\frac{8}{3}n$	(210)	0
Quadrate ohne Oberseite	<div> </div>	$n$	(203)	$\frac{1}{\ell^2} (12n-14)$	(207)	$4n^3-7n^2+3n$	(211)	0
Quadrate mit zwei Diagonalen	<div> </div>	$0.9n+0.02$	(204)	$\frac{1}{\ell^2} (2n-0.05)$	(208)	$\frac{2}{3} (n^3-n)+0.3$	(212)	$n$

Fig. 6

Fehler an freien Ketten von Streckennetzen

### 3. Können vorgespannte Seilnetze durch Anwendung der geschilderten klassischen Analogie in Form einer Ausgleichung berechnet werden?

Große vorgespannte Seilnetze par excellence finden wir am Expo-Pavillon in Montreal 1967 und bei den Münchner Dächern. Ein Blick auf das Zwischenteil der Dächer zwischen Sport- und Schwimmhalle und München – Fig. 7 – zeigt uns, daß die Dächer an jeder Stelle doppelt gekrümmt sind. Dieses Charakteristikum wird an einem Ge-

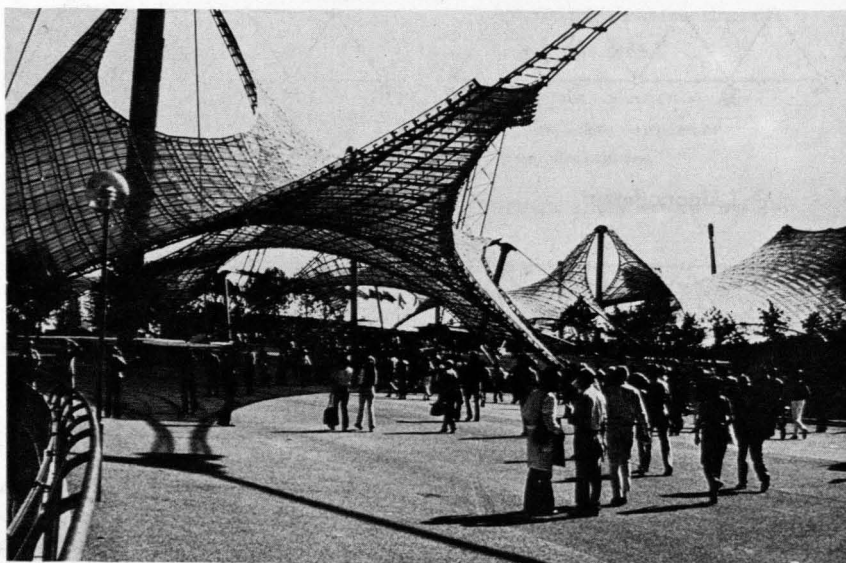


Abb. 7

Zwischenteile der Münchner Dächer zwischen Sport- und Schwimmhalle

dankenexperiment sofort verständlich [4], Fig. 8. In einem Kasten hängen wir vier elastische Seile, die wir uns als Gummiseile vorstellen können, so auf, daß sie unter ihrem Eigengewicht leicht durchhängen und damit die Form von Kettenlinien annehmen. Wollten wir diese hängenden Seile als Tragwerk für ein Dach verwenden, müßten wir dafür Sorge tragen, daß sie z. B. bei Wind nicht nach oben durchschlagen. Dazu könnten wir sie in ihrer Lage durch eine schwere Dacheindeckung stabilisieren. Wir erhielten dann ein Hängedach, wie es KENZO TANGE in der Sporthalle der

VORGESPANNTE HP-FLÄCHE

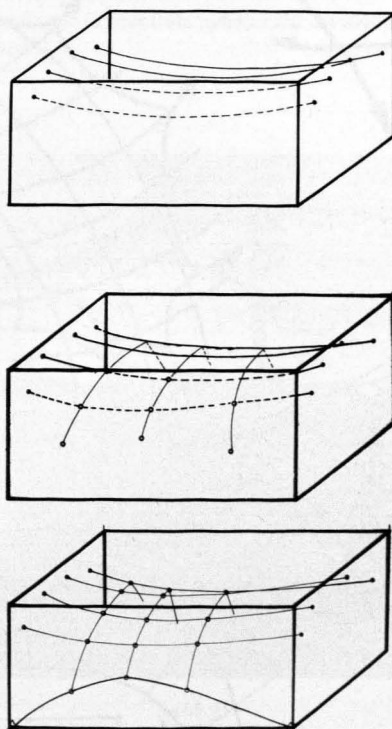


Fig. 8

*Gedankenexperiment zur Entstehung des vorgespannten Seilnetzes*

olympischen Spiele Tokyo verwirklicht hat. Wir könnten aber auch senkrecht zur Richtung der hängenden Seile eine Schar – von oben betrachtet – konvex gekrümmter Seile über die erste – von oben betrachtet – konkav gekrümmte Seilschar legen, sie in den Kreuzungspunkten mit der ersten Schar verknüpfen und ebenfalls am Rand des Kastens befestigen. Das erhaltene Netz stabilisieren wir weiter durch „Verspannen“.



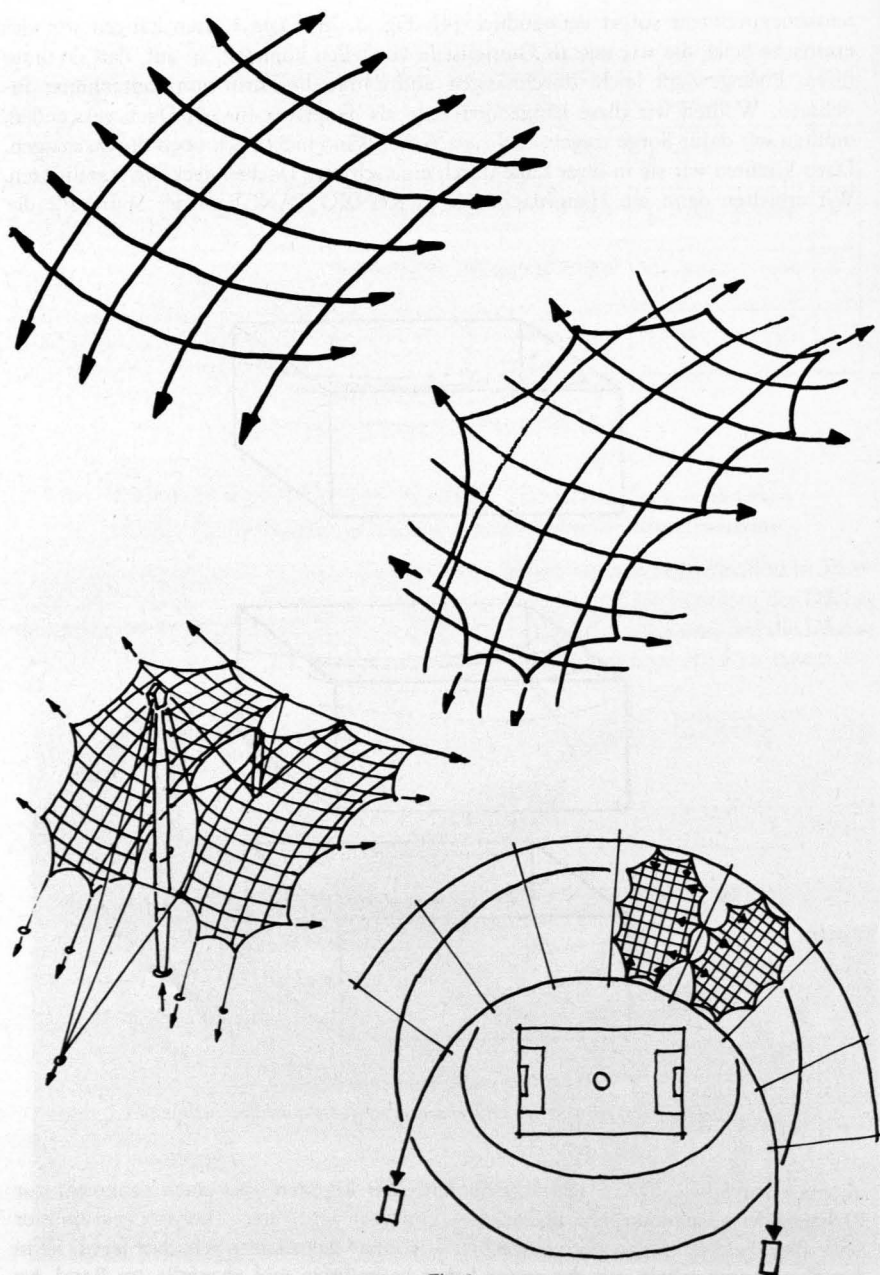
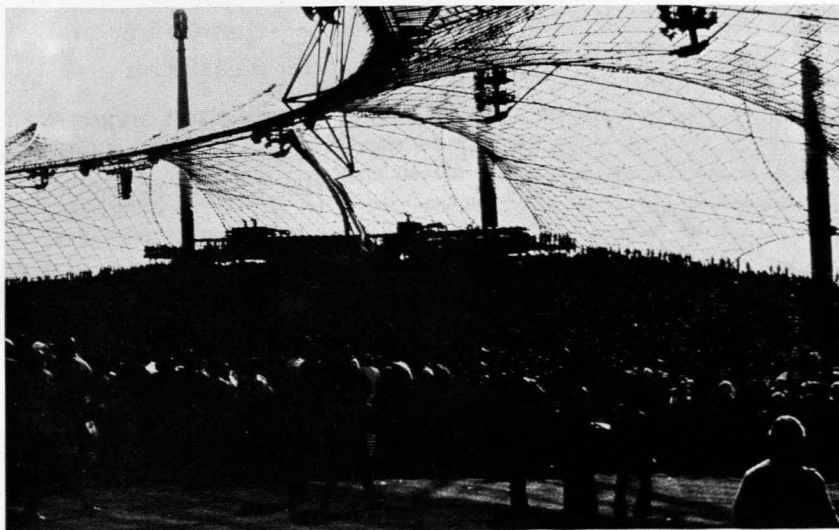


Fig. 9

Bilderserie zur Verdeutlichung des Konstruktionsprinzips für das Stadionsdach München

Dazu ziehen wir an den konkaven, durchhängenden Seilen am Rand. Durch die Verkürzung verkleinert sich ihr Druchhang, und sie haben die Tendenz, sich in den Knoten nach oben zu heben. Gleichzeitig ziehen wir an den konvexen „stehenden“ Seilen, mit der Wirkung, daß dann die Knotenpunkte nach unten wandern möchten. Ziehen wir nahezu gleichzeitig an allen 16 Enden, so ändert sich die Netzform nur gering, die Maschen werden etwas größer, jedoch das Netz verspannt sich in sich und gegenseitig sehr fest.

Genau dieses Prinzip ist an jedem einzelnen Netz der Münchner Dächer verwirklicht. Dies zeigt die Bilderserie der Fig. 9 [5], aus der man die Entstehungsgeschichte eines der neun Felder des Stadions leicht nachvollziehen kann. Bild 10 zeigt einen Blick in das fertige Stadion, und man erkennt bei jedem Feld die als typisch erkannte Doppelkrümmung an jedem Punkt.



*Abb. 10*  
*Dach des Stadions in München*

Um ein solches Netz entwerfen und bauen zu können, muß man natürlich zunächst seine geometrische Form kennen. Es ist nun ebenfalls typisch für die Formen solcher vorgespannten Seilnetze, daß sie sich nicht rein geometrisch konstruierend oder rechnend, wie etwa ein räumliches Fachwerk, finden lassen: In ihnen sind geometrische Form und – die durch elastische Längenänderung aller Einzelelemente entstehende – Vorspannkraft untrennbar miteinander verbunden. Man muß deshalb baubare Formen an Modellen experimentierend auffinden (Fig. 11).

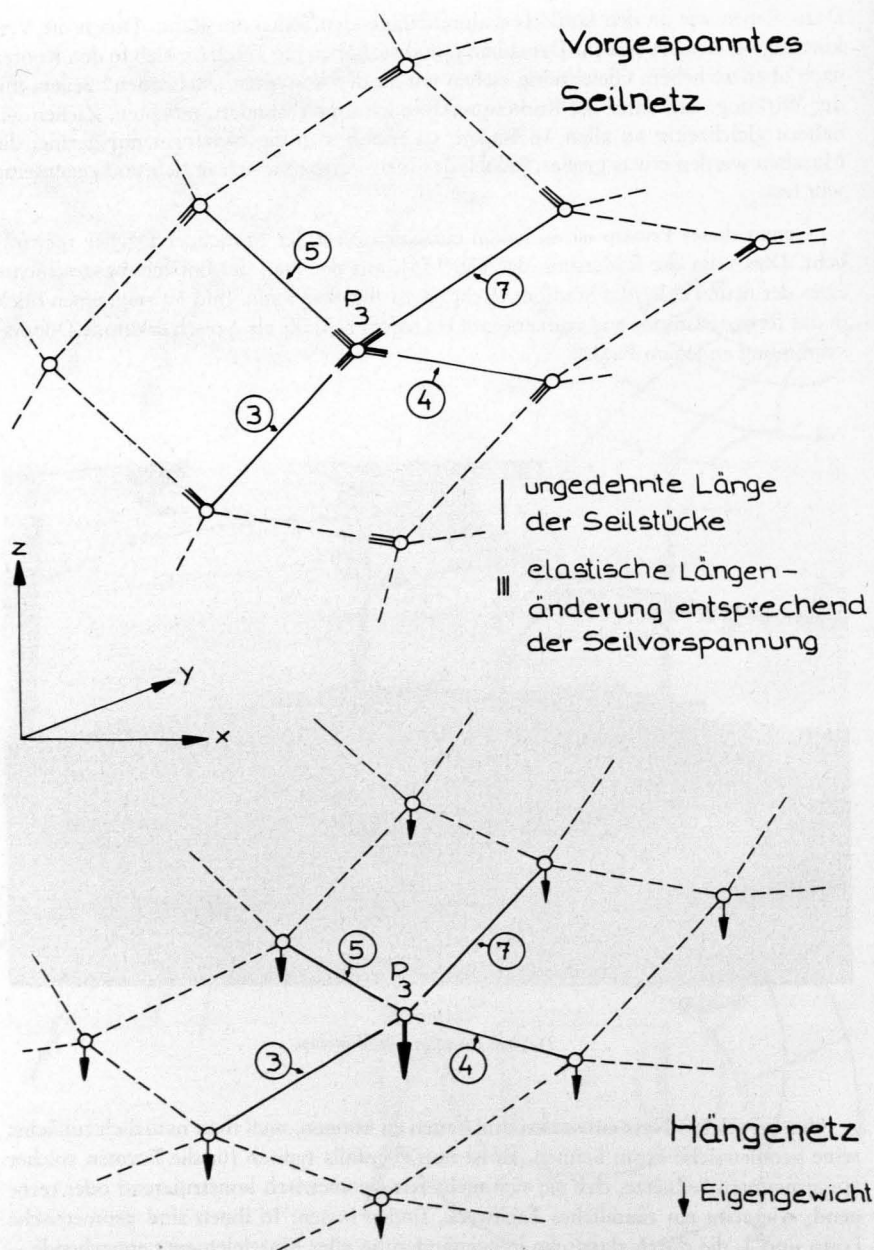


Fig. 11

Schemaskizze zur Untrennbarkeit von geometrischer Form und Zugkräften in Seilnetzen

3.1 Was sind die Aufgaben einer analytischen Seilnetzberechnung [6],  
in der die Form als Gleichgewichtsfigur exakt ermittelt wird?

Die geometrische Form des vorgespannten und damit in seinen Seilstücken elastisch deformierten Seilnetzes soll drei Kriterien erfüllen, nämlich:

die Form und ihre mathematische Beschreibung müssen genügen

- den Ansprüchen des Architekten: Nach der Berechnung muß eine Form vorliegen, die der Vorstellung oder einem Modell des Architekten entspricht,
- den Ansprüchen des Ingenieurs: Die inneren, durch die Vorspannung erzeugten Kräfte – sie sind bestimmend für das Tragverhalten, aber auch für die Dimensionierung aller Bauteile – müssen innerhalb vorgeschriebener Abgrenzungen liegen.
- den Anforderungen des Geodäten: Die Koordinaten der Gleichgewichtsfigur müssen so exakt ermittelt worden sein, daß der Zuschnitt als eine der entscheidenden Voraussetzungen für die Verwirklichung ermittelt werden kann. Dabei versteht man unter dem Zuschnitt die Ermittlung aller Seilstücklängen im ungedehnten, spannungslosen Zustand zwischen den einzelnen Knoten als Maße für Vorfertigung und Konfektionieren des Seilnetzes. Ein Blick auf ein Seilnetz in München – Abb. 12 – zeigt uns, daß das Netz aus einem regelmäßigen Teil gleicher Maschenweite im Innern und einem unregelmäßigen Teil ungleicher Seilstücklängen am Rand besteht. Setzt man gleiche ungedehnte Längen im regelmäßigen inneren Teil des Netzes voraus, so ist es wesentliche Aufgabe des Zuschnittes, die unregelmäßigen Längen im Randbereich des Netzes mit hoher Genauigkeit zu bestimmen, und weiter, die Lage aller Knotenpunkte im Raum und die sich einstellenden Seilkräfte.

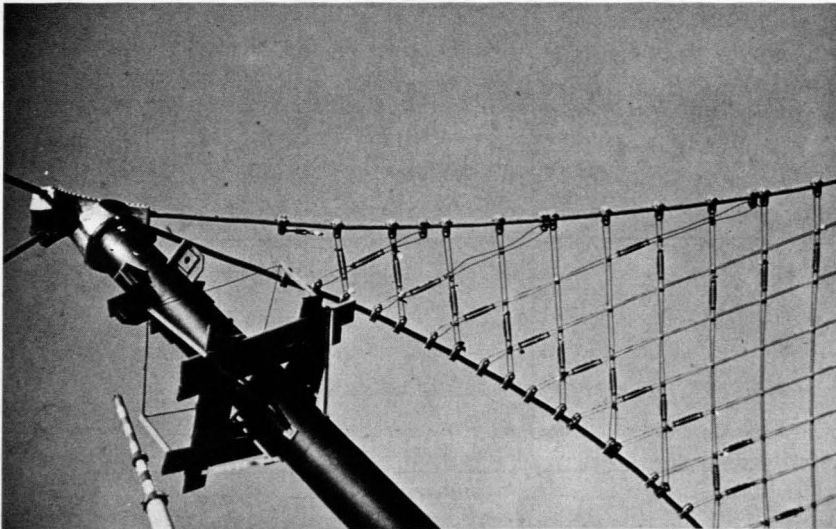


Abb. 12

Unregelmäßiger Randbereich eines Münchner Netzes

Die Untrennbarkeit von Geometrie und inneren Kräften habe ich noch einmal in Fig. 11 demonstriert: In der endgültigen, vorgespannten, elastisch verformten Lage des Seilnetzes nämlich müssen die Knoten solche *Abstände* haben, daß die jeweils zwischen ihnen liegenden Seilstücke so *gedehnt* werden, daß durch die Dehnung Kräfte in erwünschter Größe entstehen. Weiter müssen die Knoten relativ zueinander eine solche *räumliche Position* annehmen, daß die *Raumrichtungen* der zwischen ihnen liegenden Seilstücke zu Gleichgewicht in jedem Knoten führen. Ähnliches gilt für ein Hängernetz. In diesem werden allerdings die inneren Kräfte nicht durch Verspannung, sondern durch das Eigengewicht verursacht.

### 3.2 Konventioneller Bogenschnitt als Lösung?

Nach dem bisher Gesagten über die Analogie zwischen Statik und Ausgleichsrechnung fragen wir sofort, ob diese Seilnetzberechnung auf die Ausgleichung eines konventionellen räumlichen Bogenschnittes zurückgeführt werden kann. Fig. 13 zeigt ein solches einfaches Netz [7], [9]. Damit die für diese Netze typisch doppelte Krümmung der Netzfläche auftritt, stellen wir uns die Punkte 11 und 10 als Hochpunkte und die Punkte 9 und 12 als Tiefpunkte vor. Zur Berechnung treffen wir eine Reihe vereinfachender Idealisierungen. Die in der Wirklichkeit durchgehenden Seile werden durch Seilstücke – sie entsprechen dann elastischen Stäben – zwischen den Knoten ersetzt. Sie werden in den Knoten punktförmig und reibungslos so miteinander verbunden, daß

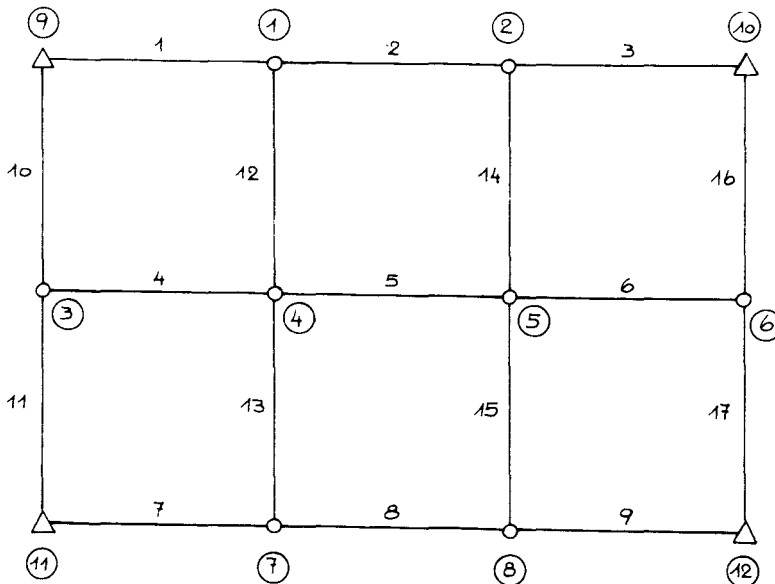


Fig. 13  
Grundriß eines kleinen Seilnetzes

keine Momente übertragen werden. Wir nehmen weiter an, wir würden die Längen aller Seilstücke – aus Messungen an einem Modell – ungefähr kennen, desgleichen die endgültigen Koordinaten der im Entwurf festgelegten Festpunkte und schließlich die ungefähren Koordinaten der Knotenpunkte im Raum – welche wir ebenfalls am Modell gemessen haben. Die Aufgaben der Seilnetzberechnung wäre dann offenbar zu übersetzen in die Ausgleichung eines räumlichen Bogenschnittes. Wie oben bekommen wir sofort die Fehlergleichungen

$$l_m + v_m = \sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2} \quad \begin{array}{l} m = 1, 2 \dots 17 \\ i, k = 1, 2 \dots 12 \end{array}$$

$$l + v = f(x)$$

welche nach Linearisierung mit

$$y = y_0 + \Delta x$$

zu den linearen Normalgleichungen entsprechend (8), Seite 6 führen, die wir, da sich  $f(x) = w$  und  $f(x_0) = w_0$  als „Wurzelausdrücke“ ergeben, auch schreiben können

$$(A' P A) \Delta x = A' P (l - w_0) \quad (21)$$

Nun vergewissern wir uns, daß unser Problem eine Mindestvoraussetzung an die vermittelnde Ausgleichung erfüllt, nämlich überbestimmt ist.

Die Anzahl der Fehlergleichungen ergibt sich als Anzahl der beobachteten Seilstücklängen zu 17. Die Anzahl der Unbekannten und damit Anzahl der Normalgleichungen ist dreimal die Anzahl der Neupunkte und damit 24. Damit ist unser Problem *unterbestimmt* und mit den klassischen Regeln der Ausgleichungsrechnung zunächst nicht lösbar. Trotzdem aber muß eine eindeutige Lösung für das vorgespannte Netz existieren. Davon könnten wir uns leicht durch ein Modell überzeugen. Würden wir in diesem Modell nämlich alle Seillängen so wählen, daß sie gegenüber der endgültigen Lage jeweils etwas zu kurz sind oder – in die Ausgleichungsrechnung übersetzt – würden wir alle Beobachtungen so wählen, daß nur positive Streckenverbesserungen durch die Ausgleichung entstehen, so erhielten wir eine eindeutige, ausgeglichene Konfiguration, welche der vorgespannten Seilnetzfigur entsprechen würde.

Wie können wir diese Zusatzbedingungen – alle Verbesserungen positiv – ausgleichungstechnisch formulieren? Eine Lösung mit direkter formelmäßiger Formulierung dieser Zusatzbedingung ist mir bisher nicht bekannt.

### 3.3 Lösung: Nichtlineare Ausgleichung Bogenschnitt!

Wir gelangen jedoch auch zum Ziel, wenn wir die Technik der *nichtlinearen* Ausgleichungsrechnung anwenden. Denn nur durch sie wird genügend exakt die physische Realität des vorgespannten Seilnetzes beschrieben, daß nämlich Gleichgewicht zwischen den inneren Kräften im vorgespannten, d. h. im *verformten* Zustand bestehen muß. In welcher Weise wir dabei unser Vorgehen zu ändern haben, sehen wir aus der folgenden kleinen Gegenüberstellung.

Bei der konventionellen linearen Ausgleichung haben wir

- nichtlineare Fehlergleichungen, die wir
- linearisieren und, indem wir die
- Nebenbedingung  $[vvp] = \text{Minimum}$  für die linearisierte Fehlergleichung ansetzen, überführen in
- die linearen Normalgleichungen, die in üblicher Weise gelöst werden.

In der nichtkonventionellen nichtlinearen Ausgleichung haben wir

- nichtlineare Fehlergleichungen wie oben, setzen jedoch die
- Nebenbedingungen  $[vvp] = \text{Minimum}$  bereits für die *nichtlinearen* Fehlergleichungen an und bekommen damit
- nichtlineare Normalgleichungen. Diese nichtlinearen Normalgleichungen werden dann gelöst mit einem
- Lösungsverfahren der numerischen Mathematik für nichtlineare Gleichungen, wobei wir in einzelnen linearen Iterationsschritten das nichtlineare Problem lösen. Damit nimmt die nichtlineare Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen – auch für das Beispiel Bogenschnitt – folgende Form an [8]. Es müssen erfüllt werden die nichtlinearen Fehlergleichungen

$$\mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{l}$$

mit der Nebenbedingung

$$\mathbf{v}' \mathbf{P} \mathbf{v} = [\mathbf{f}'(\mathbf{x}) - \mathbf{l}'] \mathbf{P} [\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{l}] \Rightarrow \min.$$

Notwendige Bedingung für das Minimum ist

$$\frac{\partial \mathbf{v}' \mathbf{P} \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0}$$

und Differenzieren ergibt

$$2 \mathbf{v}' \mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0}$$

Wegen

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{A} \text{ und mit } \mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{l}$$

erhalten wir schließlich die nichtlinearen Normalgleichungen

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \equiv \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)' \mathbf{P} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{l}) = \mathbf{0} \quad (22)$$

die linearisiert werden müssen. Dabei müssen wir nach der Kettenregel vorgehen und sowohl

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[ \underbrace{\left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)'}_{\text{const.}} \underbrace{\mathbf{P} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{l})}_{\text{variabel}} \right]$$

wie auch

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \underbrace{\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)'}_{\text{variabel}} \underbrace{P(f(x)-1)}_{\text{const.}} \right]$$

jeweils nach  $x$  ableiten. Da in  $\partial f / \partial x$  bereits die ersten Ableitungen nach den Unbekannten stehen, ist die Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \underbrace{\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)'}_{\text{variabel}} \underbrace{P(f(x)-1)}_{\text{const.}} \right]$$

gleichbedeutend mit einer zweiten Ableitung nach den Unbekannten. Sie ist formal etwas kompliziert und ausführlich dargestellt in [9]. Wir erhalten schließlich die linearisierten Endgleichungen

$$(C'QC + X'PLW^{-3}X) \Delta x = A'P(1 - f(x_0)) \quad (23)$$

für ein Inkrement  $\Delta x$  bei der Iteration zur Auflösung der nichtlinearen Gleichungen (22) mit einer positiv definiten Normalgleichungsmatrix.

In der Gleichung (23) ist

- $C$  die „Kantenknotenmatrix“, die das Netzgebilde topologisch beschreibt und deren Elemente 0, +1 und –1 sind. Jede Zeile von  $C$  entspricht einem Seilstück zwischen zwei Knoten, jede Spalte einem Knoten. Jedes Seilstück ist an seinen Endpunkten mit je einem Knoten verbunden. Dies wird in der Kantenknotenmatrix dadurch beschrieben, daß in jeder Zeile nur einmal +1 und einmal –1 steht. Dabei steht +1 in der Spalte, die dem Anfangspunkt und –1 in der Spalte, die dem Endpunkt des Stabes entspricht.
- $Q$  eine Hyperdiagonalmatrix mit den Elementen  $q = p(e - \frac{1}{w})$  (24). Sie hat *nichts* zu tun mit der üblichen Gewichtsreziprokenmatrix!
- $X$  die in Formel (7) angeschriebene Matrix der Koordinatendifferenzen.

Wir verweilen einen Augenblick bei der Normalgleichungsmatrix aus (23):

$$N = \underbrace{C'QC}_{\textcircled{2}} + \underbrace{X'PLW^{-3}X}_{\textcircled{1}} = \text{Term } \textcircled{2} + \text{Term } \textcircled{1}$$

Wegen  $X'W^{-1} = A'$  nach (7) bekommen wir für  $\textcircled{1}$

$$X'PLW^{-3}X = A'P(LW^{-1})A$$

bis auf die Diagonalmatrix  $L \cdot W^{-1}$  gerade unsere bekannte Normalgleichungsmatrix ( $A'PA$ ) der linearen vermittelnden Ausgleichung. Die Diagonalmatrizen  $L$  und  $W$  enthalten die beobachteten und ausgeglichenen Längen der Seilstücke, somit gilt in guter Annäherung

$$L \cdot W^{-1} \approx E$$

Term  $\textcircled{2} = C'QC$  ist gegenüber der linearen Ausgleichung ein Zusatzterm. Die Elemente  $q$  von  $Q$



$$\mathbf{q} = \mathbf{p} \left( \mathbf{e} - \frac{1}{\mathbf{w}} \right) \quad = (24)$$

sind gerade dann positiv, wenn

$$0 < \frac{1}{\mathbf{w}} < 1$$

gilt, also wenn  $1 < \mathbf{w}$  ist, d. h. wenn alle Verbesserungen positiv sind. Elastomechanisch übersetzt aber bedeutet es, daß überall Zugkräfte auftreten. Es läßt sich nachweisen, daß  $\mathbf{N}$  nun gerade dann positiv definit ist, wenn alle Elemente des hinzugekommenen Terms ② positiv sind und damit eine eindeutige Lösung für die nichtlineare Ausgleichung des räumlichen Bogenschnittes existiert, wenn alle Verbesserungen positiv sind, mit anderen Worten, wenn der räumliche Bogenschnitt einem *vorgespannten* räumlichen Seilnetz entspricht.

Wir gelangen nun, und das ist bemerkenswert, in nur einem Schritt von den Normalgleichungen (23) des räumlichen Bogenschnittes zu den elastomechanischen Gleichungen des Seilnetzes: Dazu setzen wir nur überall – entsprechend der Übersetzungstabelle Fig. 4 – anstelle des Gewichtes  $\mathbf{P}$  den Hooke'schen Koeffizienten  $\mathbf{H} \cdot \mathbf{L}^{-1}$ , also

$$\mathbf{P} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{L}^{-1} \text{ ein!}$$

Damit haben wir eine Methode der Seilnetzberechnung allein aus der nichtlinearen Ausgleichsrechnung – ohne ein elastomechanisches Gesetz und ohne eine Gleichgewichtsbedingung angeschrieben zu haben – formuliert [9].

Wir können weiter aus den bisherigen Ansätzen alle weiteren Ansätze entwickeln und betrachten dazu

#### 4. Die verschiedenen Formen der Seilnetzberechnung

##### 4.1 Nichtlinearer Bogenschnitt und Festansatz der Statiker

Da die nichtlineare Ausgleichung des räumlichen Bogenschnittes und die elastomechanisch-statische Berechnung des vorgespannten Seilnetzes einander so vollkommen entsprechen, fragen wir nach den analogen Bedeutungen weiterer Beziehungen und Gleichungen:

Unsere nichtlinearen Normalgleichungen (22)

$$\left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)' \mathbf{P} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{l}) = \mathbf{0}$$

übersetzen wir mit  $\mathbf{P} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{L}^{-1}$  und  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}$  sofort in

$$\left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)' \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{L}^{-1} (\mathbf{w} - \mathbf{l}) = \mathbf{0} \quad (22 \text{ a})$$

oder auch

$$\left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)' \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{L}^{-1} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{l}) = \mathbf{0}$$

die Gleichgewichtsbedingungen in jedem Netzknoten im verformten Zustand!

Denn, da  $\mathbf{w} - \mathbf{l} = \mathbf{v}$  („gedehnte Länge“ minus „ungedehnte Länge“ gleich „elastische Längenänderung“) ist, sind die Stabkräfte  $\mathbf{s}$  nach dem Hooke'schen Gesetz

$$\mathbf{s} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{L}^{-1} (\mathbf{w} - \mathbf{l}) \quad \triangleq (10), (16)$$

und

$$\left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right)' \mathbf{s} = \mathbf{A}' \mathbf{s} = \mathbf{0}$$

beschreibt gerade das Kräftegleichgewicht in jedem Netzknoten.

Nun ein knapper Blick auf die Normalgleichungsmatrix  $\mathbf{N}$  aus (23). Nach [8] finden wir für die Matrix der Kofaktoren  $\mathbf{Q}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}$  der Knotenpunktkoordinaten

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\mathbf{x},\mathbf{x}} &= \left( \mathbf{C}' \mathbf{Q} \mathbf{C} + \mathbf{A}' \mathbf{P} (\mathbf{L} \cdot \mathbf{W}^{-1}) \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}' \mathbf{P} \mathbf{A} \left( \mathbf{C}' \mathbf{Q} \mathbf{C} + \mathbf{A}' \mathbf{P} (\mathbf{L} \cdot \mathbf{W}^{-1}) \mathbf{A} \right)^{-1} \\ \mathbf{Q}_{\mathbf{x},\mathbf{x}} &= \mathbf{N}^{-1} (\mathbf{A}' \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{N}^{-1} \end{aligned}$$

In  $\mathbf{N} = \textcircled{1} + \textcircled{2}$  hängt der Term  $\textcircled{1}$  – nahezu identisch mit den Normalgleichungen der linearen Ausgleichung – ausschließlich von der geometrischen Konfiguration des Netzes ab. Elastomechanisch übersetzt beschreibt also dieser Term die Nachgiebigkeit des Netzes in einem Knoten unter Einheitsbelastung als Folge der geometrischen Konfiguration. Term  $\textcircled{2}$  hängt dagegen nur von der Größe der Verbesserungen, also, elastomechanisch übersetzt, nur von der Größe der elastischen Längenänderungen, d. h. der Größe der Vorspannung ab. Das bedeutet, daß wir bei nahezu gleicher Geometrie –  $\textcircled{1} = \text{const.}$  – durch Erhöhung der Vorspannung die Steifigkeit des Netzes erhöhen können. Dies ist von großer praktischer Bedeutung für den Entwurf vorgespannter Seilnetze: ihr Tragverhalten wird durch geometrische Konfiguration *und* die Vorspannung des Netzes bestimmt.

Obwohl unsere Lösung exakt ist und – sofern wir gute Näherungswerte aus einem Modell haben – auch zu einer eindeutigen Lösung führt, ist sie in dieser Form für die Praxis nur begrenzt einsetzbar. Sie erlaubt nämlich lediglich die Nachrechnung eines bereits gefundenen Zuschnittes und gibt dann darüber Aufschluß, welche geometrische Form und welche Kräfte sich mit den aus dem Modell gemessenen Seilstücklängen und Festpunktkoordinaten tatsächlich einstellen. Wir können jedoch aus den bisherigen Betrachtungen weitere Formen der Seilnetzberechnung ableiten.

Der gleiche Nachteil aber haftet auch dem konventionellen „Festansatz“ der Statiker an [10]. In diesem Festansatz werden, wie beim nichtlinearen räumlichen Bogenschnitt, die Koordinaten der Festpunkte, Näherungskoordinaten für die Raumknoten und die im regulären inneren Teil gleichen, ungedehnten Längen  $\mathbf{l}_j$  vorgegeben. Für den Rand gibt man jedoch anstelle der Seilstücklängen  $\mathbf{l}_R$  feste Kräfte  $\mathbf{S}_R$  vor. Zur Übersetzung dieser gegenüber dem Bogenschnitt abgeänderten Vorgabe schreiben wir die Gleichgewichtsbedingungen des Gesamtnetzes als Kombination von (22 a) und (10) an. In beiden Gleichungen beschreibt  $\mathbf{A}'$  die geometrische Form. Wir spalten  $\mathbf{A}'$  auf in eine Teilmatrix  $\mathbf{A}'_j$ , welche dem inneren, regelmäßigen Teil des Netzes entspricht – hier sollen laut Vorgabe gleiche ungedehnte Längen  $\mathbf{l}_j$  auftreten – und in eine zweite

Teilmatrix  $A'_R$ , welche die Geometrie des Randbereiches beschreibt. Für den Randbereich ersetzen wir nach dem Hooke'schen Gesetz die elastischen Längenänderungen  $(f(x) - l_R)$  durch die Kräfte  $s_R$ :

$$H \cdot L^{-1} (f(x) - l_R) = s_R \quad \triangleq (10)$$

Dann erhalten wir die Gleichungen

$$A'_J H \cdot L^{-1} (f(x) - l_J) + A'_R \cdot s_R = 0 \quad (25)$$

welche das Gleichgewicht für das Gesamtnetz beschreiben.

Dies Gleichungssystem ist wieder eindeutig lösbar, und man erhält eine Gleichgewichtsfigur, Kräfte im Netz und eine geometrische Form, welche den vorgegebenen Größen entsprechen. Jedoch können die Gesamtform, die Führung der Seile im Detail und die Einzelkräfte, welche sich nach der Berechnung einstellen, wesentlich von den Wünschen des Architekten und Ingenieurs abweichen. Praktisch zeigt sich dies u. a. daran, daß sich die Gesamtform ändert und daß trotz Eingabe von Näherungskordinaten, die einer gestreckten Seilführung entsprechen, an den Netzrändern Knicke der Endseilstücke auftreten, zu sprungartigen Kräfteänderungen im Netz führen. Als Abhilfe müssen bei der Berechnung die Seile immer wieder neu „ausgerichtet“ werden: Dazu werden manuell neue Koordinaten auf dem Randseil für den Endpunkt jedes einzelnen Seiles berechnet, dann wird die Gleichgewichtsberechnung wiederholt. Diese Art der Berechnung läßt sich als „Nachspannen vom Rand aus“ auffassen. Je nach Form des Netzes können durch das Nachspannen vom Rand die Kräfte im Innern jedoch nur mehr oder weniger indirekt beeinflußt werden, so daß viele Gleichgewichtsfiguren versuchsweise durchgerechnet werden müssen, bis man eine befriedigende Lösung findet.

Eine wirkliche Fortentwicklung brachte der

#### 4.2 Ausgleichungsansatz der Geodäten [11]

In diesem gehen wir wieder von den Gleichgewichtsbedingungen (25) aus:

$$A'_J \cdot H \cdot L^{-1} (f(x) - l_J) = A'_R s_R = 0 \quad = (25)$$

wir interpretieren jedoch nicht mehr, wie in den vorausgegangenen zwei Ansätzen, nur die Koordinaten  $x$  als Unbekannte, sondern betrachten jetzt die Koordinaten  $x$  der Netzknoten *und* die Seilkräfte  $s_R$  in den Randstücken als Unbekannte. Da wir  $3n$  Koordinaten und  $(m - m_J = m_R)$  Randbereichseilstücke aber nur  $3n$  Gleichgewichtsbedingungen haben, ist das System jetzt  $m_R$ -fach unterbestimmt. Dies System, nämlich die nichtlinearen Normalgleichungen des räumlichen Bogenschnittes, lesen wir nun als System von Bedingungsgleichungen, dem nämlich die Knotenpunktkoordinaten  $x$ , die inneren Stablängen  $l_J$  und die Randkräfte  $s_R$  im Gleichgewichtszustand exakt genügen müssen. Zur Auffindung einer eindeutigen Lösung setzen wir die Nebenbedingung an

$$(x - x_0)' B_{\text{arch}} (x - x_0) + (s - s_0)' B_{\text{ing}} (s - s_0) \Rightarrow \min.$$

Darin bedeuten  $B_{\text{arch}}$  eine „Gewichtsmatrix Architekt“ und  $B_{\text{ing}}$  eine „Gewichtsmatrix Ingenieur“. Der Ausgleichungssatz hat dann den entscheidenden Vorteil, daß nach Entnahme einer Ausgangsgeometrie  $x_0$  aus einem Modell und nach Schätzung von Randkräften  $s_{0R}$  dann durch passende Wahl der Gewichte  $B_{\text{arch}}$  und  $B_{\text{ing}}$  Gleichgewichtsfiguren gefunden werden, die sich sowohl einer gewünschten Geometrie  $x$  wie auch einem gewünschten Kräfteverlauf  $s$  möglichst gut anpassen. Weiter werden solche Lösungen in wesentlich weniger Rechenschritten als beim Festansatz gefunden.

Auf diese Art und Weise wurden für München das Stadion und die Zwischenteile berechnet.

Der wirkliche Durchbruch aber wurde mit dem Ansatz

#### 4.3 Erweiterter Ausgleichungsansatz

erreicht [12]. Er ergab sich anhand einer praktischen Aufgabe, welche die Ingenieure vorgegeben hatten. Die verschiedenen Rechengruppen des SFB 64 sollten ein kleines Testnetz aufgrund vorgegebener Festpunkt- und Näherungskordinaten der Knotenpunkte als Gleichgewichtsfigur berechnen. Zusätzlich aber war von den Ingenieuren gefordert worden, daß im Innern des Netzes vorgegebene Kräfte möglichst gut eingehalten werden sollten. Weiter sollte die Gesamtlänge der Randseile einen vorgegebenen Festwert haben. Von den verschiedenen möglichen, alle in der Nähe der Näherungswerte liegenden Gleichgewichtsfiguren sollte also eine bestimmte aufgefunden werden. Diese praktische Aufgabenstellung führte zur Entwicklung des „erweiterten Ausgleichungsansatzes“. Wie im Ausgleichungsansatz nach 4.2 werden wieder die Gleichgewichtsbedingungen (25) für den inneren und äußeren Teil des Netzes kombiniert angesetzt. Da sie unterbestimmt sind, ist es nun nach den bekannten Regeln der Ausgleichungsrechnung möglich, Nebenbedingungen für die Unbekannten des Problems anzugeben, und das um die Gleichungen

$$g(x, l, s) = 0 \quad (26)$$

erweiterte System

$$A'_J H \cdot L^{-1} (f(x) - l_J) + A'_R s_R = 0$$

mit der Nebenbedingung

$$(x - x_0)' B_{\text{arch}} (x - x_0) + (s - s_0)' B_{\text{ing}} (s - s_0) \triangleq \min.$$

zu lösen. Nach Linearisierung der Nebenbedingungen wie in der Ausgleichungsrechnung üblich, ließen sich in wenigen Rechenschritten die von den Ingenieuren vorgegebenen Bedingungen einhalten.

Der Ansatz hat aber noch eine weitere für die Praxis wesentliche Anwendung, nämlich die Entwicklung von Formen für den Bau weitspannender Gitterkuppeln. Auf der Bundesgartenschau Mannheim 1975 ist das zum ersten Mal mit großer Spannweite verwirklicht worden. Als Ausgangsfigur für eine solche Kuppel nimmt man ein Hänge-

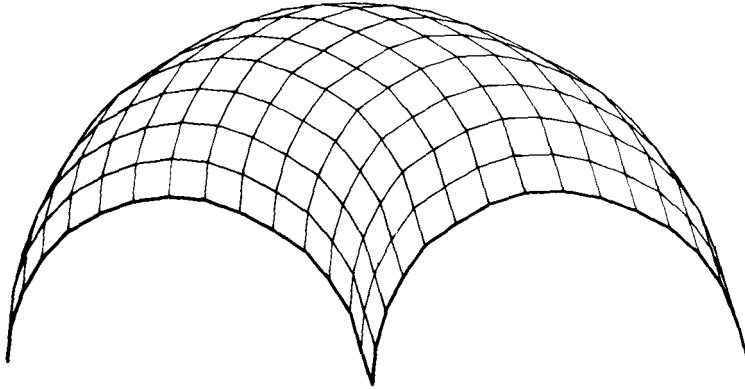


Fig. 14

*Hängenetz als Ausgangsform für eine Gitterkuppel*

netz, Fig. 14. Danach stelle man sich das Hängenetz, dessen Form sich unter der eigenen Schwerkraft als verallgemeinertes Gebilde der Kettenlinie ergibt, in sich verfestigt und um  $180^\circ$  gedreht vor. Man erhält eine Kuppel, in der im „Lastfall Eigengewicht“ alle Kräfte als Normalkräfte innerhalb der Stäbe verlaufen, die also in diesem Idealfall nur Druckkräfte und keine Momente aufweist. In ähnlicher Weise ist der Bogen der Bogenbrücke Umkehrung einer Kettenlinie, und der gleiche Gedanke war entscheidend für die Konstruktionen des spanischen Architekten GAUTHIER bei seinen Bauwerken in Barcelona. Eine solche Kuppel wurde erstmalig aus einem Lattenrost bei der Weltausstellung Expo 1967 Montreal verwirklicht. Die Fig. 15 und 16 zeigen eine Computerzeichnung des Hängemodells und seiner Umkehrung als Kuppel für die Multihalle der Bundesgartenschau in Mannheim.

Die Berechnung war fast direkt möglich nach dem erweiterten Ausgleichungsansatz. Sie hätte jedoch nach dem einfachen Ausgleichungsansatz, also angesetzt wie die Berechnung eines vorgespannten Seilnetzes, erhebliche Schwierigkeiten ergeben. Das läßt sich leicht einsehen: Wir erinnern uns daran, daß die Normalgleichungen des nicht-linearen Bogenschnittes für das vorgespannte Seilnetz

$$\underbrace{(C' Q C + X' P L W^{-3} X)}_{\textcircled{2}} \Delta x = A' P (1 - f(x_0)) \quad = (23)$$

$\textcircled{1}$

die aus einem Term  $\textcircled{1}$  und einem Term  $\textcircled{2}$  bestehen, singular würden, wenn wir nur den Term  $\textcircled{1}$  ansetzten, der sich bei der normalen linearen Ausgleichung ergibt. Die Nichtsingularität und damit die Lösbarkeit wird erst erreicht durch Überlagerung mit der Matrix  $\textcircled{2}$ . Diese wiederum ist dann positiv definit und macht damit auch die Gesamtmatrix positiv definit, wenn alle Seilkräfte Zugkräfte sind und gleichzeitig spürbare elastische Längenänderungen auftreten. In einem Hängenetz mit seinen verhältnismäßig dehnungssteifen Stäben sind die elastischen Längenänderungen unter

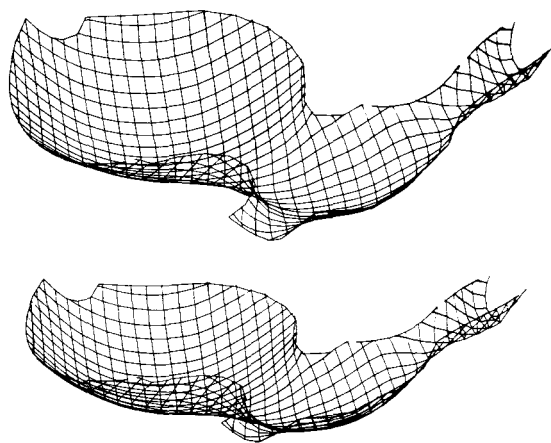


Fig. 15

Computerzeichnung des Hängenetzes für die Multiballe Mannheim

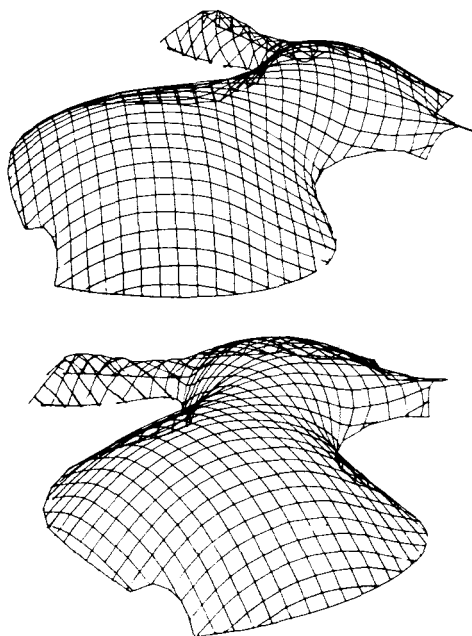


Fig. 16

Umkehrung der Fig. 15: aus dem Hängenetz wird die Kuppel

Eigengewicht so gering, daß der Überlagerungseffekt der Matrix ② beinahe fortfällt und auch das nichtlineare Ausgleichungsproblem quasi singular ist. In ersten Versuchen, die Seilnetzrechnung der Hängernetzberechnung anzupassen, wurde deshalb bei der Berechnung die Elastizität künstlich vergrößert: Wir berechneten zunächst ersatzweise Gumminetze, die sich unter Eigengewicht bereits merklich tatsächlich verformen. Dann gingen wir von den Formen des Gumminetzes durch langsames, schrittweises Ändern der Elastizitätszahlen zum wirklichen Material eines Hängernetzes aus Metall oder Holz über. Beim erweiterten Ausgleichungsansatz wird nun zusätzlich zur Gleichgewichtsbedingung in jedem Knoten auch für jeden einzelnen Stab eine Abstandsbedingung für die Koordinaten der ausgeglichenen Punkte vorgeschrieben: Die ausgeglichenen, endgültigen Punkte müssen so im Raum liegen, daß die Abstände zwischen ihnen gleich den ungedehnten Stablängen sind. Mit diesen zusätzlichen Bedingungen gelang die Berechnung eines Hängernetzes in wenigen Schritten.

Die Vorgabe zusätzlicher Bedingungen aber erlaubte auch die automatische Entknickung der Seilführung. Es werden die zusätzlichen Bedingungen eingeführt, daß die Seilkraft im Endstück gleich der Seilkraft in den vorausgegangenen Seilstücken im Netzzinneren ist.

Eine weitere Anwendung ist die Berechnung von Netzvierteln oder Netzzachteln bei symmetrischen Konfigurationen. Sie werden in einem zweiten Berechnungsschritt durch Zwangsbedingungen zum Gesamtnetz vereinigt. Diese zusätzlichen, häufig vom Architekten und Ingenieur gestellten Bedingungen, welche damit eingehalten werden können, sind noch einmal in Fig. 17 zusammengestellt.

Die Berechnung der Gleichgewichtsfigur mit dem „Ausgleichungsansatz“ ermöglicht die direkte Lösung mit zusätzlichen Bedingungen!

- In bestimmten Seilstücken können Kräfte vorgeschrieben werden
- Im Randbereich können Seile automatisch entknickt werden
- Abweichungen von der im Modell realisierten Form können durch den Gewichsfaktor  $P_A$  („Architekt“) minimiert werden
- Abweichungen von Sollkräften können durch den Gewichsfaktor  $P_E$  („Ingenieure“) minimiert werden.
- Schnelle Lösung zur Formfindung von Hängernetzen durch die Einführung von „Abstandsbedingungen“.

Fig. 17  
Einhaltung zusätzlicher Bedingungen in Seilnetzen

## 4.4 Kraftdichteansatz nach SCHEK

Einen weiteren wesentlichen Fortschritt brachte der Kraftdichteansatz, der bereits 1969 [11] in seinen Grundzügen skizziert und 1973 von SCHEK im Detail ausgearbeitet und vorgelegt worden ist [13]. Diese Arbeit wurde von den Freunden der Universität Stuttgart e.V. preisgekrönt. Um den Ansatz zu verstehen, greifen wir noch einmal auf das Gleichungssystem des Bogenschnittes ganz zu Anfang zurück und erinnern uns daran, daß wir die Matrix  $A'$  auch in der Form

$$A' = X' W^{-1} \quad = (7)$$

schreiben können. Aus unseren Gleichgewichtsbedingungen (15), (23)

$$A' s = 0$$

wird dann

$$X' W^{-1} s = 0 \quad (27)$$

Diese fast trivialen Gleichgewichtsbedingungen lesen wir dadurch in neuartiger Weise, daß wir den Quotienten aus Kraft  $s$  und Länge  $w$  zu einer neuen Einheit, der Kraftdichte  $q$ , zusammenfassen

$$W^{-1} s = q$$

Damit erhalten wir das neue Gleichungssystem

$$X' q = 0 \quad (28)$$

Die  $q$  in (28) sind aber identisch – wie hier nicht im einzelnen gezeigt werden soll – mit den Elementen  $q$  der Diagonalmatrix  $Q$  im Term ② von  $N$  aus (23), nachdem wir mit  $P = H \cdot L^{-1}$  in die Elastomechanik übersetzt haben. In der Matrix  $X'$  stehen nur Koordinatendifferenzen. Nach Trennung von Neu- und Festpunktkoordinaten und unter Hinzunahme der Kantenknotenmatrix  $C$  läßt sich (28) einfach umformen in

$$(C' Q C) \cdot x = C' Q C_f x_f \quad (29)$$

ein *lineares* Gleichungssystem, aus dem die Neupunktkoordinaten  $x$  des vorgespannten Seilnetzes aus vorgegebenen Kraftdichten  $q$  (welche Elemente in  $Q$  sind), Festpunkten  $x_f$  und einer Netzverknüpfung  $C$ ,  $C_f$  *linear* ermittelt werden können. Mit anderen Worten: Durch Zusammenfassen von zwei bisher getrennt betrachteten Größen, nämlich Kraft und Länge eines Seilstückes zu einer neuen, höheren Einheit Kraft-Längen-Verhältnis, erhalten wir ein lineares Gleichungssystem für die zunächst unbekannten Koordinaten der Knotenpunkte. Das erlaubt uns, in einem einzigen linearen Rechenschritt nach Vorgabe der Netzverknüpfung  $C$  von Festpunkten und von geschätzten Kraftdichten für alle Seilstücke die zugehörigen Knotenpunktkoordinaten einer Gleichgewichtsfigur zu berechnen. Diese Gleichgewichtsfigur, die zunächst in ihrer Seilführung und in den Längen der einzelnen Seilstücke unregelmäßig sein kann, nehmen wir nun zum Ausgangspunkt weiterer Berechnungen, indem wir durch Einführung von Zwangsbedingungen für bestimmte Kräfte und Koordinaten sie in eine Gleichgewichts-



figur überführen, welche nach Kräftebild dem Ingenieur und nach Form dem Architekten genügt. Dies geschieht im

#### *4.5 Erweiterten Kraftdichteansatz*

in dem diese zusätzlichen Bedingungen wieder ausgleichungstechnisch behandelt werden. Im Prinzip erlaubt es der erweiterte Ausgleichungsansatz, auf den Bau eines Modells zum Aufsuchen von Näherungswerten gänzlich zu verzichten. So wurde in der Studie zu einer Überdachung eines Marktplatzes in Maracaibo/Venezuela eine baubare Netzform erzeugt, nachdem man lediglich den Grundriß skizziert hatte und die Verknüpfung in einem groben Raster skizziert worden war. Es genügte dann, alle Kraftdichten zu „eins“ zu schätzen.

Herr Präsident, meine Damen und Herren, ich hoffe Ihnen gezeigt zu haben, wie aus einem Prinzip, nämlich dem Minimumprinzip der Methode der kleinsten Quadrate, und einer Gleichung, nämlich der Gleichgewichtsbedingung am Netzknoten, die diesem Minimumprinzip äquivalent ist, und danach durch verschiedene Interpretierungen dieser Gleichung und dieses Prinzips neue Berechnungsansätze zur Formfindung und statischen Analyse von räumlichen Seil- und Hängenetzen abgeleitet werden konnten: der Ausgleichungsansatz, der erweiterte Ausgleichungsansatz mit zusätzlichen Bedingungen, die Kraftdichtemethode und schließlich die erweiterte Kraftdichtemethode.

## Literaturverzeichnis

- [1] Born, M.: Physics in my Generation; Springer Verlag New York Inc. 1969.
- [2] Linkwitz, K.: Fehlertheorie und Ausgleichung von Streckennetzen nach der Theorie elastischer Systeme; Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe C, Heft 46, München 1961.
- [3] Wolf, H.: C. F. Gauß und die Methode der kleinsten Quadrate; AVN 1977, Heft 4.
- [4] Linkwitz, K.: Die Ermittlung des Zuschnitts für die Dächer der Olympiasportstätten München; ZfV 1972, Heft 9, 10.
- [5] Leonhardt, F. und Schlaich, J.: Vorgespannte Seilnetzkonstruktionen, Das Olympiadach München; Mitteilungen 19/1973 des SFB 64, Universität Stuttgart, Stuttgart 1973.
- [6] Linkwitz, K.: Combined use of computation techniques and models for the process of form-finding for prestressed nets, grid shells and membranes; Internationales Symposium Vorgespannte Flächentragwerke, SFB 64, Universität Stuttgart 1976.
- [7] Gründig, L.: Die Berechnung vorgespannter Seil- und Hängernetze unter Berücksichtigung ihrer topologischen und physikalischen Eigenschaften und der Ausgleichungsrechnung; DGK, Reihe C, Heft 216, München 1976.
- [8] Schek, H. J. und Meier, Ph.: Nichtlineare Normalgleichungen zur Bestimmung der Unbekannten und deren Kovarianzmatrix; ZfV 1976, Heft 4.
- [9] Linkwitz, K.: Die Berechnung vorgespannter Seilnetze als Aufgabe der Ausgleichungsrechnung; Internationaler Kurs für Ingenieurvermessungen hoher Präzision; Darmstadt 1976.
- [10] Argyris, J. H. und Scharpf, D. W.: Berechnung vorgespannter Netzwerke; Bayerische Akademie der Wissenschaften, mathem. naturw. Klasse, Sonderdruck 4 der Sitzungsberichte 1970, München 1970.
- [11] Linkwitz, K. und Schek, H. J.: Einige Bemerkungen zur Berechnung von vorgespannten Seilnetzkonstruktionen; Ingenieur-Archiv 1971, S. 145–158.
- [12] Linkwitz, K., Schek, H. J., Gründig, L.: Die Gleichgewichtsberechnung von Seilnetzen unter Zusatzbedingungen; Ingenieur-Archiv 1974, S. 183–192.
- [13] Schek, H. J.: The force densities method for form finding and computation of general networks; Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1974, S. 115–134.